

OPERACIONES Y SISTEMAS MECÁNICOS

CAPITULO 3

5^{ta} 4^{ta}.

PROFESOR: COLODOBA

ESTÁTICA

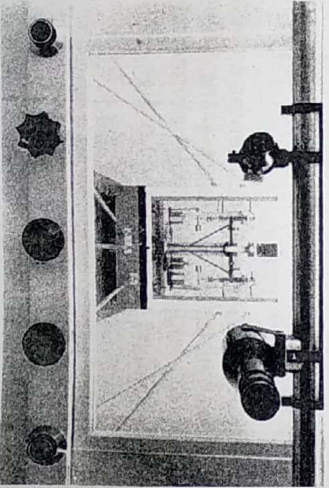
Introducción

La noción de fuerza la tenemos a través de la experiencia. Si queremos mantener un cuerpo debemos realizar un esfuerzo muscular para equilibrarlo que llamamos su peso. Decimos que los cuerpos pesan porque la masa terrestre ejerce sobre ellos una fuerza de atracción. Esa fuerza dirigida hacia el centro de nuestro planeta es de dirección vertical, sentido hacia abajo y de una intensidad proporcional a la masa del cuerpo que se considere, dependiendo además de la ubicación. Concluimos que el peso, y en general las fuerzas, son magnitudes vectoriales.

No solamente se logra el equilibrio por acción de las fuerzas sino que, precisamente, al no equilibrarse éstas son las causas de movimientos. Por otra parte no es necesario que las fuerzas se apliquen por contacto directo entre cuerpos; hay acciones de fuerzas ejercidas a distancias tales como la indicada de la gravedad, las magnéticas o las eléctricas.

Si la fuerza es una magnitud física, es susceptible de ser medida, y la medición la podemos efectuar usando las propiedades elásticas de algunas sustancias (una de las formas posibles), con aparatos llamados dinamómetros.

La unidad comúnmente usada en la vida diaria para medir fuerzas es el kilogramo fuerza, que es el peso a 45° de latitud y al nivel del mar del kilogramo masa, prototipo de platino-iridio depositado en la Oficina Internacional de Pesas y Medidas, en Severs (Francia).



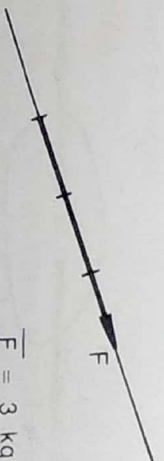
Balanza con mandos remotos y anteojos, utilizada con el kilogramo masa patrón en los laboratorios del INTI.

Decimos que un cuerpo es elástico si luego de aplicada una fuerza exterior que lo deforma, el cuerpo retoma su forma primitiva al suprimirla. No sobrepasando ciertos valores, los metales en general son elásticos. Estableciendo la ley de las deformaciones en función de las fuerzas aplicadas (calibración), se podrá observar la deformación y conocer la fuerza que la produce.



Una fuerza (peso) produce el alargamiento de un resorte.

Al hablar de la noción de fuerza quedó determinado el carácter vectorial de la misma; por lo tanto la representación gráfica de una fuerza es:



Por definición el kilogramo fuerza es el peso del kilogramo masa en determinado lugar. La masa de un cuerpo es constante, pero el peso del mismo no lo es, siendo máximo en los polos y mínimo sobre el ecuador, por ser diferentes los radios terrestres, menores en zonas polares y mayores en la zona ecuatorial, alejándose así del centro de la masa del planeta. Por idéntica razón también disminuye el peso con el crecer de la altura sobre el nivel del mar. Esta disminución es aproximadamente de 0,0003 gramo por kilómetro de altura; es decir, que un cuerpo de 1 kg de peso al nivel del mar, varía 0,3 g por cada 1 000 metros de altura.

Peso y masa son dos conceptos distintos que no deben confundirse. En el capítulo 4 se tratará a fondo su vinculación.

Se llama peso específico de una sustancia al peso de la unidad de volumen.

$$\rho = \frac{P}{V}$$

Las unidades usadas comúnmente son:

$$\frac{g}{cm^3} \quad ; \quad \frac{kg}{m^3} \quad ; \quad \frac{tn}{m^3}$$

Sistemas de fuerzas

Un conjunto de fuerzas vinculadas por algún motivo constituye un sistema de fuerzas. Por ejemplo, todas las fuerzas que actúan sobre un cuerpo. Cada una de ellas se llama componente, y aquella capaz de reemplazar a todas produciendo idéntico efecto se denomina resultante. La misma se halla por suma vectorial de las componentes.

La estática, que es parte de la mecánica, estudia los sistemas de fuerzas en equilibrio. Por lo tanto si una o varias fuerzas no se hallan equilibradas habrá que agregar la necesaria para llevar al sistema al equilibrio. Tal fuerza se llama equilibrante.

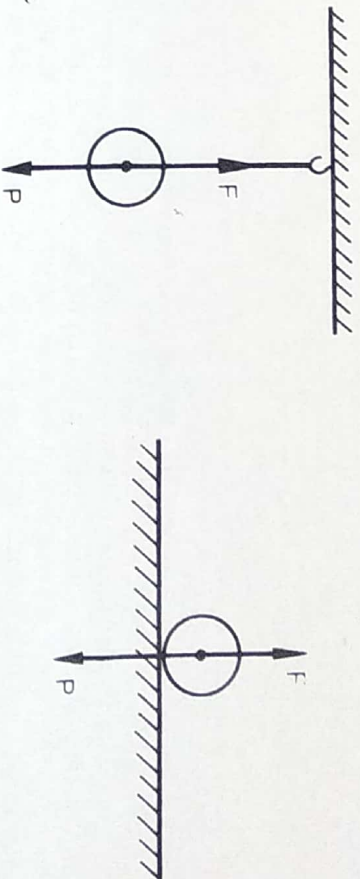
El sistema más simple es el formado por dos fuerzas iguales en intensidad y en dirección pero de sentidos opuestos.



En tales condiciones, el sistema de fuerzas en equilibrio. Asignando el signo + a un sentido (por ejemplo al de F_2), el sentido opuesto llevará el signo -, y matemáticamente se tiene:

$$\bar{R} = \bar{F}_2 + (-\bar{F}_1) = \bar{F}_2 - \bar{F}_1 = 0$$

Por lo tanto, la resultante de un sistema en equilibrio es cero, ya que $|F_1| = |F_2|$.



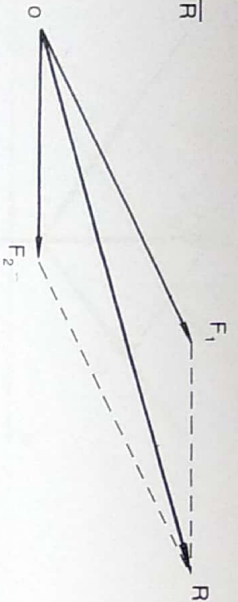
Múltiples ejemplos tenemos de sistemas como el analizado. Un cuerpo colgado de un hilo no cae porque su peso está equilibrado con la fuerza que produce el hilo. Si lo apoyamos sobre un plano, será éste el que proporcione la fuerza suficiente para mantener el objeto. En ambos casos la fuerza que aparece por la acción del peso se llama reacción del vínculo. Estas reacciones aparecen por deformaciones que en la mayoría de los casos son muy pequeñas e imperceptibles en forma directa. El principio de acción y reacción lo veremos como corresponde al estudiar dinámica.

Composición de fuerzas

Dos o más fuerzas cuyas rectas de acción se cortan en un punto se llaman concurrentes.

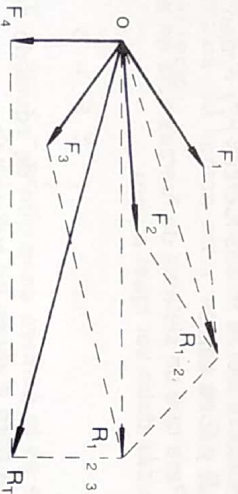
Para hallar la resultante de un sistema de fuerzas concurrentes se hace la suma vectorial de las mismas. Tal operación se realiza gráficamente formando con ellas (en el caso de ser sólo dos) un paralelogramo; trazando la diagonal del mismo determinada entre el punto común y el vértice opuesto se obtiene la resultante.

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{R}$$

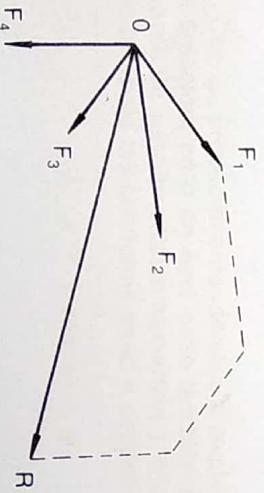


Si al sistema lo componen más de dos fuerzas se halla la resultante de dos cualesquiera; luego ésta se compone con la siguiente y así sucesivamente hasta agotar las fuerzas.

$$\begin{aligned}\vec{F}_1 + \vec{F}_2 &= \vec{R}_{1,2} \\ \vec{R}_{1,2} + \vec{F}_3 &= \vec{R}_{1,2,3} \\ \vec{R}_{1,2,3} + \vec{F}_4 &= \vec{R}_T \\ \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 &= \vec{R}_T\end{aligned}$$



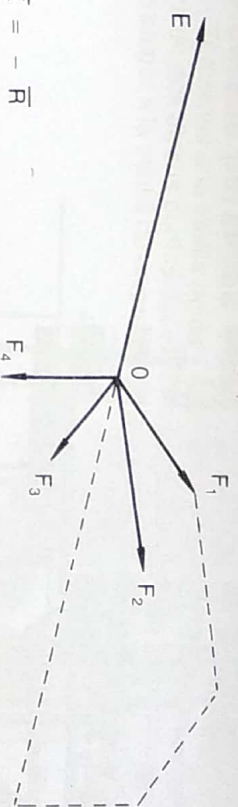
Observando la figura anterior se deduce que resulta innecesario hallar las resultantes parciales, ya que la poligonal formada a partir del punto 0 y formada con los segmentos de igual longitud y paralelos a las fuerzas, determina la resultante del sistema. Este es el llamado sistema de la poligonal.



$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \vec{R}$$

Poligonal es una sucesión ordenada de segmentos, tales que el fin de cada uno es el origen del que le sigue.

Si la poligonal es abierta, la resultante es distinta de cero y el sistema no está en equilibrio. Para llevarlo habrá que agregar, como se dijo, la equilibrante, que es la fuerza que cierra la poligonal; es decir, la equilibrante de un sistema es una fuerza de igual dirección e intensidad que la resultante, pero de sentido opuesto.

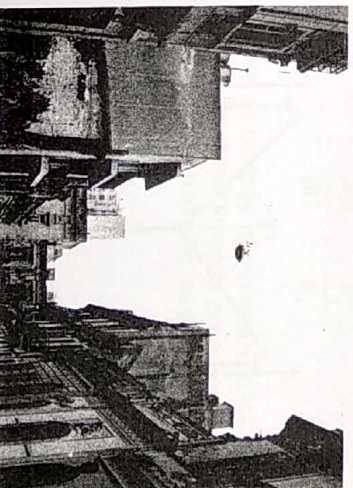


$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\vec{R} \\ \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 + \vec{E} &= 0\end{aligned}$$

Apliquemos nuevamente el método científico.

Observación

En el andar por las calles de nuestra ciudad nos encontramos, por ejemplo, con algunos faroles de iluminación que están suspendidos por dos cables fijados sobre los frentes de edificios de ambas aceras.



Hipótesis

El farol se halla en equilibrio porque su peso está contrarrestado por las fuerzas que realizan los cables.

Experimentación

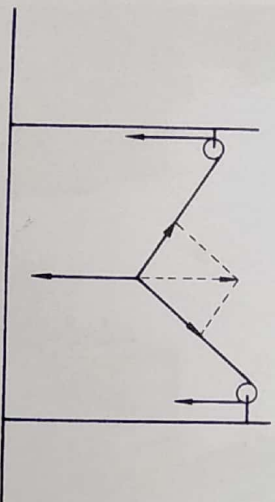
Recordemos que experimentar es reproducir en condiciones favorables el fenómeno bajo estudio. Para los casos anteriores (en cinemática) su puesta en marcha fue oportuno aprovechar la realidad; tomando distancias y tiempos reales pudieron establecerse las leyes respectivas.

Ahora en cambio es más ventajoso usar nuestro laboratorio y así planear todas las variaciones de la situación observada.



La reproducción de lo observado permite efectuar mediciones

Al farol lo reemplazamos por una pesa, los cables por hilos, que en lugar de estar ligados a dos puntos fijos, al pasar por sendas poleas fijas nos permitirán cambiar sólo la dirección y sentido de las fuerzas haciéndolas verticales, y así poder usar pesos para equilibrar el sistema. ⁽¹⁾



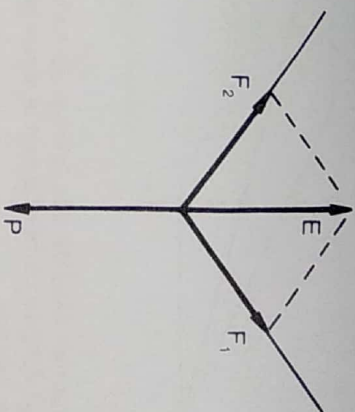
De igual manera, sobre un plano colocamos ahora dinamómetros ligados en un punto (fuerzas concurrentes). Resulta fácil trasladar a un papel el esquema de los mismos obteniendo los resultados adelantados por la teoría (suma vectorial).

Generalización

La resultante de un sistema de fuerzas concurrentes es igual a la suma vectorial de las componentes; para que el sistema se halle en equilibrio deberá actuar la fuerza de igual intensidad, igual dirección y sentido opuesto a la resultante, que se denomina **equilibrante**.

⁽¹⁾ En el capítulo 5 se estudiarán poleas y quedará justificado lo dicho.

Para el caso de la figura



$$\begin{aligned}\vec{F}_1 + \vec{F}_2 &= \vec{E} \\ \vec{P} &= -\vec{E} \\ \vec{E} - \vec{P} &= 0\end{aligned}$$

Actúa la fuerza P. Las fuerzas F_1 y F_2 dan como resultante a E. La suma de P y E es cero.

Para que un sistema de fuerzas esté en equilibrio la suma de **todas** las fuerzas debe ser igual a cero:

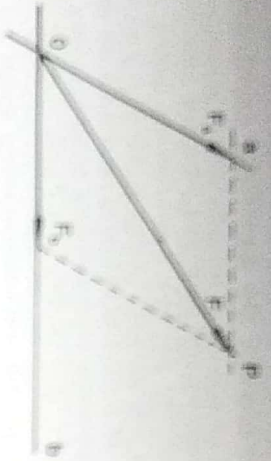
$$\sum F_i = 0$$

que es la primera condición de equilibrio de la estática; condición necesaria pero a veces no suficiente.

Para el caso del método de la poligonal, resulta evidente que la misma debe ser cerrada para que el sistema se halle en equilibrio. En caso contrario deberá agregarse la equilibrante que cerrará la poligonal, ya que es igual y opuesta a la resultante.

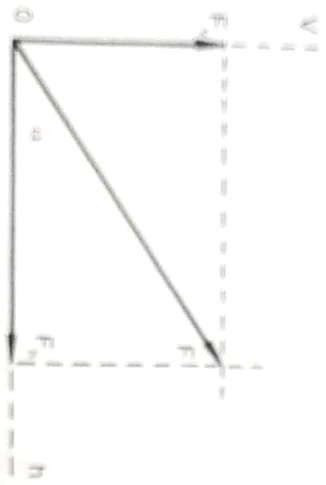
Descomposición de fuerzas

El problema inverso al de componer fuerzas es la descomposición de una fuerza en sus componentes. Hay infinitos pares de componentes que dan la misma resultante. En general se desea saber el valor de las componentes según dos direcciones conocidas.



Como se comprenderá, la solución del problema se logra trazando por el extremo de F (punto P) las paralelas a las direcciones dadas, sobre ellas quedarán determinadas las fuerzas F_v y F_h buscadas.

Un caso muy particular, pero muy frecuente, es tener la necesidad de conocer las componentes normales (se llaman así a las que tienen sus direcciones formando un ángulo recto)



Con un procedimiento idéntico al explicado precedentemente se llega a la solución, pero en este caso también pueden hallarse los valores mediante un sencillo cálculo numérico⁽¹⁾. Efectivamente: recordando las definiciones de las funciones seno y coseno, puede escribirse:

$$F_v = F \cdot \sin \alpha \quad \text{y} \quad F_h = F \cdot \cos \alpha$$

⁽¹⁾ Por supuesto, puede hallarse los valores de las componentes para cualquier valor de α .

Fuerzas paralelas

Tomemos una varilla rígida y liviana. Colguemos dos pesos cualesquiera de dos de sus puntos. La experiencia nos indica que deberemos apoyar o colgar a la varilla de un punto entre los pesos para conseguir el equilibrio.



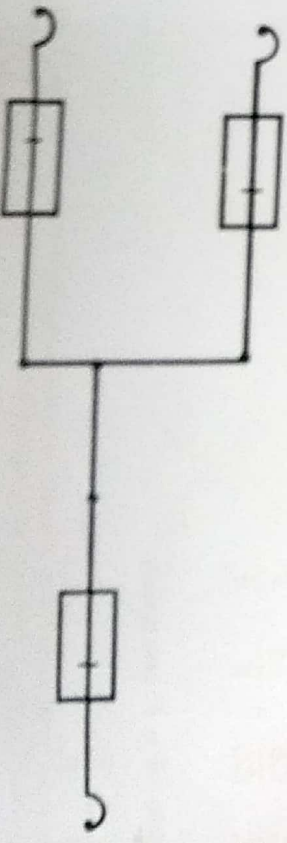
En esta situación planteada, variando la ubicación de los pesos comprobaremos que hallado el punto donde debe ubicarse la equilibrante el sistema quedan determinados segmentos AC y CB , tales que cumplen la siguiente relación:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{F_2}{F_1}$$

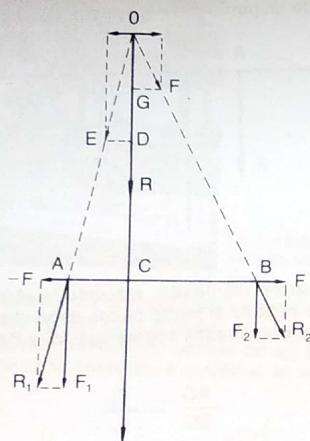
La expresión anterior se conoce como relación de Stevin y puede enunciarse así: Cada fuerza es directamente proporcional al segmento determinado por los puntos de aplicación de las otras dos, incluyendo también a la resultante del sistema.

$$\frac{F_1}{AC} = \frac{F_2}{BC} = \frac{R}{AB}$$

Colocando dinamómetros, quedan establecidas las relaciones de intensidades, lo que permite decir que la intensidad de la resultante es la suma de las intensidades de las componentes.



Se puede demostrar lo anterior geométicamente. Sea un sistema de dos fuerzas paralelas y de igual sentido, agregando al sistema de F_1 y F_2 dos fuerzas de la misma recta de acción, igual intensidad y sentido contrario, ya que si se equilibran entre si no modifican al sistema.



Componiendo F_1 con $-F$ y F_2 con F , se obtienen R_1 y R_2 , que resultan concurrentes en el punto O ; por lo tanto pueden componerse trasladándolas a ese punto. Considerando los triángulos ACO con ODE y BCO con OFG se tiene, dado que son semejantes:

$$\frac{AC}{OC} = \frac{ED}{OD} = \frac{-F}{F_1} \text{ y } \frac{CB}{OC} = \frac{FG}{OG} = \frac{F}{F_2}$$

Dividiendo

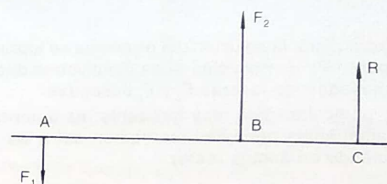
$$\frac{AC}{OC} : \frac{CB}{OC} = \frac{-F}{F_1} : \frac{F}{F_2}$$

y como $-F = F'$ nos queda

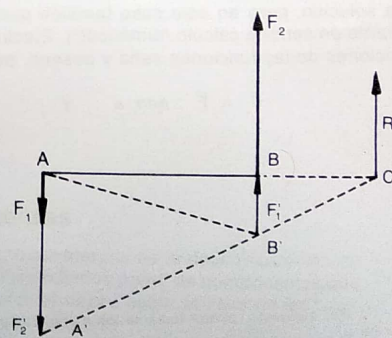
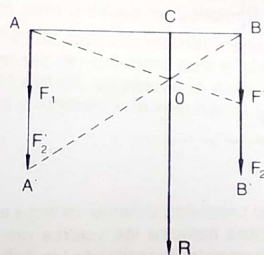
$$\frac{AC}{CB} = \frac{F_2}{F_1}$$

Fuerzas paralelas de sentido contrario

Cuando las fuerzas son paralelas pero sus sentidos son contrarios la resultante es también paralela a las fuerzas dadas, su intensidad es la diferencia de las intensidades (suma algebraica) y su sentido será el de la mayor. La recta de acción de la fuerza resultante, en este caso igualmente determinará segmentos inversamente proporcionales a las fuerzas componentes; es decir, que también para este caso es válida la relación de Stevin.



Para ambos casos de fuerzas paralelas de igual o distinto sentido, puede hacerse una construcción gráfica simple, tal como se indica en las figuras.



Tal como se desprende de los esquemas, lo que se hace es trasladar sobre la recta de acción de una de las fuerzas la otra, uniendo luego el origen de una con el extremo de la otra. Las dos rectas así determinadas se cortan en un punto que pertenece a la recta de acción de la resultante del sistema.

Lo anterior queda justificado recordando el teorema de geometría que dice: las alturas homólogas de triángulos semejantes son directamente proporcionales a los lados correspondientes. En los triángulos $AA'O$ y $BB'O$ se tiene:

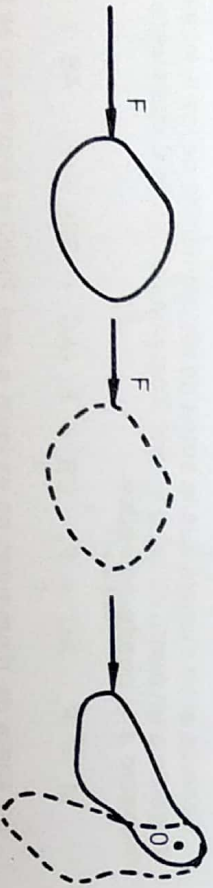
$$\frac{AC}{AA'} = \frac{CB}{BB'} \text{ como } \frac{AA'}{BB'} = \frac{F_2}{F_1} \quad \frac{AC}{F_2} = \frac{CB}{F_1}$$

Igualmente en los triángulos $AA'C$ y $BB'C$:

$$\frac{AB}{AA'} = \frac{BC}{BB'} \text{ como } \frac{AA'}{BB'} = \frac{F_2}{F_1} \quad \frac{AB}{F_2} = \frac{BC}{F_1}$$

Momento de una fuerza

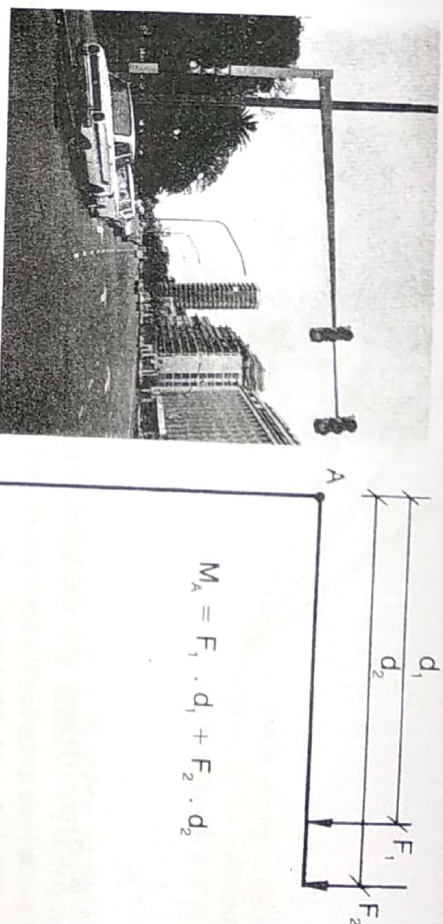
Si tomamos un cuerpo supuestamente libre, cuando sobre él actúa una fuerza, en principio es lícito pensar que tenderá a moverse con dirección y sentido de la fuerza y proporcionalmente a ella.



Pero si al mismo cuerpo lo fijamos por un punto (le quitamos un grado de libertad) tal como el O, la acción de la fuerza dará como resultado la rotación del cuerpo alrededor de dicho punto y no una traslación como en el caso anterior. Decimos que sobre el cuerpo actúa un momento.

Se llama momento estático de una fuerza con respecto a un punto, al producto de la intensidad de la fuerza por la distancia del punto a la recta de acción de la fuerza.

$$M = F \cdot d$$



La realidad y el esquema correspondiente.

Si la fuerza se mide en kilogramos y la distancia en metros, el momento quedará expresado en kilogrametros (kgm).

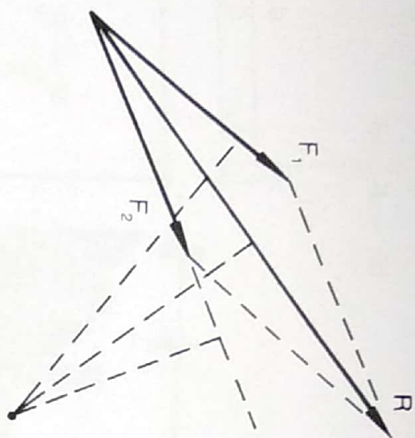
El momento es una magnitud vectorial. El vector momento se define diciendo que su módulo es igual al producto de la intensidad de la fuerza por la distancia entre el punto centro de momento y la recta de acción de la fuerza, su dirección es perpendicular al plano determinado por la fuerza y el punto considerado y el sentido es concordante con la regla del tirabuzón ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ El momento es en realidad el producto vectorial de la fuerza por el vector tomado desde el origen de la fuerza hasta el punto centro de momento:

$$\vec{F} \cdot \vec{D} = F \cdot D \sin \alpha = F \cdot d$$

Teorema de Varignon

El momento, con respecto a un punto de la resultante de un sistema de fuerzas, es igual a la suma de los momentos de las componentes con respecto al mismo punto.



Ecuaciones de equilibrio de la estática

Ahora podemos añadir otra condición de equilibrio, la referente a momentos. Las dos ecuaciones son:

$$\sum F = 0 \quad \text{y} \quad \sum M = 0$$

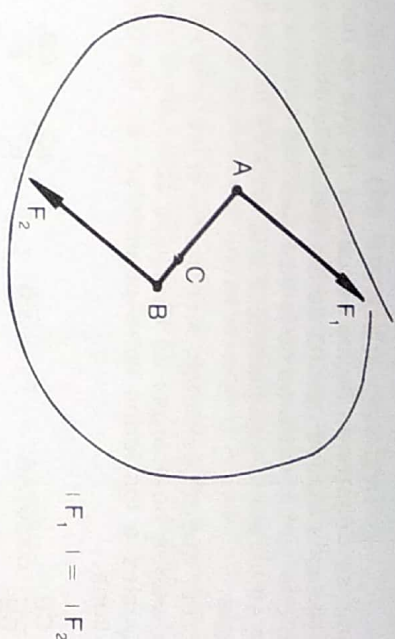
Para que un sistema de fuerzas se halle en equilibrio deben cumplirse ambas condiciones:

- La suma de todas las fuerzas debe ser igual a cero.
- La suma de los momentos de todas las fuerzas con respecto a un mismo punto debe ser cero.

Cupla

Si aplicamos lo dicho anteriormente para encontrar la resultante de dos fuerzas paralelas y de sentido contrario, en el caso de que las dos fuerzas tengan igual intensidad, tendremos:

$$R = F_1 - F_2 = 0$$



He aquí un caso para el cual se cumple la condición de equilibrio de fuerzas; pero cabe recordar que es condición necesaria pero no suficiente. En efecto, resulta evidente que el cuerpo sometido a la acción de un "par de fuerzas" o cupla se moverá, rotando.



Veamos si se cumple que la suma de los momentos de las fuerzas con respecto a un punto es igual a cero. Tomemos un punto C cualquiera; con respecto a él puede escribirse:

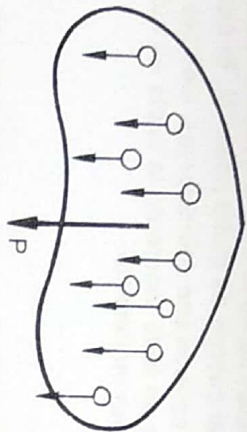
$$M_1 = F_1 \cdot AC + F_2 \cdot CB = F_1 (AC + CB) = F_1 \cdot AB \neq 0$$

La suma de momentos no es igual a cero, luego el sistema no se halla en equilibrio.

Por otra parte podemos decir que el momento de una cupla es igual al producto de la intensidad de una de las fuerzas por la distancia entre las rectas de acción de ambas.

Centro de gravedad

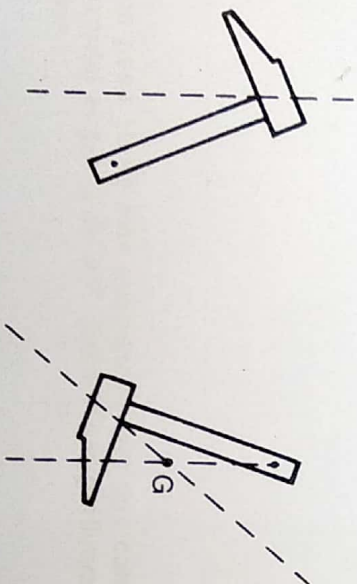
Si a un cuerpo lo suponemos subdividido en pequeñas partes, cada una de ellas tendrá su propio peso. Todos esos pesos son fuerzas verticales con sentido hacia abajo; la suma de todos ellos nos dará el peso del cuerpo.



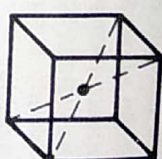
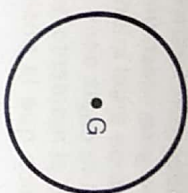
Cualquiera sea la posición del cuerpo, el peso se ejercerá en dirección vertical y con sentido hacia abajo. Puede comprobarse experimentalmente que siempre la recta de acción del peso (a pesar de tener distinta posición respecto del cuerpo) pasará por un punto determinado, que se llama centro de gravedad del cuerpo y se lo supone como punto de aplicación de la fuerza peso. Pero es necesario aclarar que puede pertenecer o no al cuerpo, por lo que se definirá como sigue:

Se llama centro de gravedad de un cuerpo al punto por donde pasa la recta de acción del peso para cualquier posición del cuerpo.

Fácilmente puede determinarse el centro de gravedad. Para ello bastará suspender el cuerpo por dos puntos cualesquiera; quedará determinado donde se corten las verticales que pasen por ellos.



Tal como puede verse en la figura, en este caso el centro de gravedad no pertenece a un punto del cuerpo, cae fuera de él. En una esfera maciza y homogénea coincide con su centro geométrico. En el caso de un cubo se halla en la intersección de las diagonales.

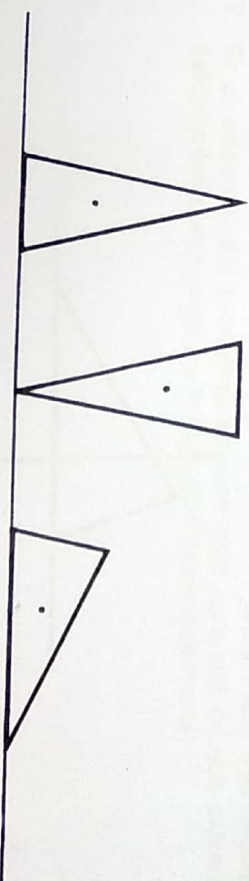


Equilibrio de cuerpos vinculados

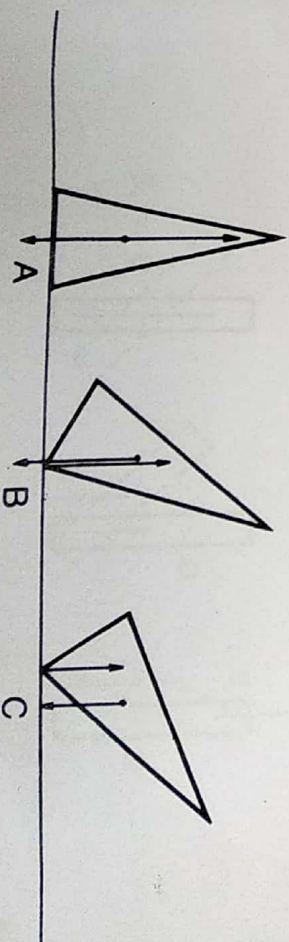
Llamamos cuerpo vinculado a aquel que se apoya o pende de otro. Para lograr el equilibrio se deberán cumplir las dos condiciones de la estática. Estudiaremos separadamente el equilibrio de cuerpos apoyados y de cuerpos suspendidos.

Cuerpos apoyados

Supongamos tener un cono; el mismo puede apoyarse sobre su base, por su vértice o según una generatriz. Para los tres casos se cumplirá la primera condición, ya sea que el peso se verá equilibrado con la reacción del plano donde se apoya.

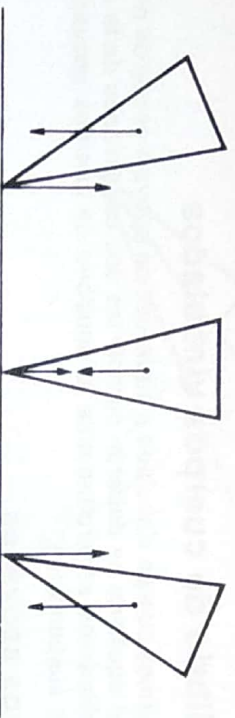


Para comprobar qué tipo de equilibrio se tiene en cada uno de los casos propuestos, lo sacaremos levemente de su posición y analizaremos el planteo de la segunda condición de equilibrio.



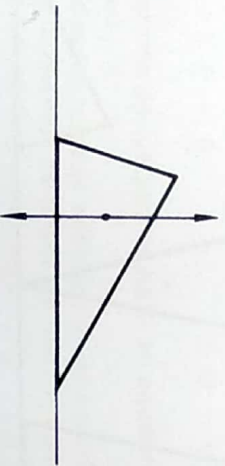
Para el caso de estar apoyado según su base, se podrá restituir el equilibrio mientras la recta de acción del peso pase por dentro de la base de sustentación. En efecto, el peso del cuerpo y la reacción del plano donde se halla apoyado, al ser fuerzas paralelas de igual intensidad y de sentido opuesto forman una cupla. En el caso A la cupla tiene valor cero, pues ambas fuerzas son colineales; en el caso B el momento que aparece tiende a volverlo a su posición primitiva. Se dice que la posición es de equilibrio estable.

Para el segundo caso (apoyado por el vértice), cualquier movimiento producirá la aparición de una cupla, cuyo momento es siempre de volcamiento.



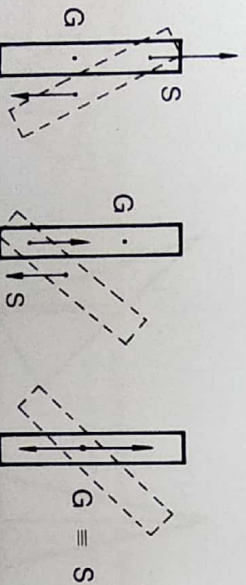
Se está en presencia de una posición de equilibrio inestable.

Finalmente, cuando se lo apoya según una generatriz, los desplazamientos que puede sufrir el cuerpo no harán alterar el equilibrio, que se denominará indiferente.



Cuerpos suspendidos

Para este tipo de vinculación tendremos que tomar en consideración dos puntos: el centro de gravedad y el centro de suspensión.



Para el caso en que el centro de suspensión se encuentra por encima del centro de gravedad, al retirar el cuerpo de la posición de equilibrio volverá a ella, ya que la cupla formada por el peso y la reacción en el punto de suspensión dará un momento tendiente a restituir el equilibrio. Es por lo tanto una posición de equilibrio estable.

En la posición B también puede lograrse el equilibrio, pero éste será inestable, dado que al salir de dicha posición en que el centro de gravedad y el de suspensión están sobre la misma vertical, aparecerá una cupla que tiende a alejar más al cuerpo de dicha posición. El equilibrio es inestable.

Finalmente, si los centros son coincidentes, siempre el cuerpo se hallará en equilibrio, ya que en todo momento la cupla es nula. Estamos en presencia de un equilibrio indiferente.

EJERCICIOS

1. Calcular el módulo de la resultante de dos fuerzas concurrentes, una horizontal de 40 kg y otra vertical de 20 kg.
2. Descomponer gráficamente una fuerza de 50 g, inclinada 30° en sus componentes horizontal y vertical, y calcular analíticamente sus valores.
3. Determinar el módulo de la resultante de dos fuerzas concurrentes $F' = 4$ g y $F'' = 4$ g, cuyas rectas de acción forman un ángulo de 120° .
4. Un farol que pesa 10 kg está suspendido por dos cables que forman con la horizontal ángulos de 30° . Determinar gráficamente la tensión en los cables.
5. La válvula de seguridad de una caldera hace, debido a la presión interior, una fuerza de 4 kg. ¿Qué peso deberá colocarse en el extremo de la barra si ésta tiene 20 cm y la válvula está a 5 cm del apoyo?
6. Dos obreros pesan 60 y 120 kg cada uno y están parados respectivamente a 2 m y 1 m de cada extremo de un andamio de 6 m de largo. ¿Qué fuerza soporta el andamio y dónde está ubicada respecto de los extremos? (gráficamente).
7. Si el andamio del problema anterior está apoyado en sus extremos, calcular las reacciones en los apoyos (numéricamente).
8. Hallar la resultante de una fuerza vertical hacia arriba de 6 kg y de otra también vertical pero de sentido opuesto de 2 kg, distante de la primera 0,8 m.