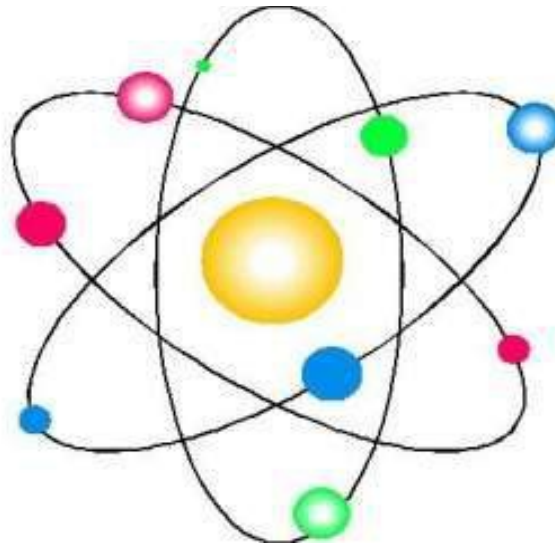


## ***E.E.S.T. N° 8 de Morón***



Materia: Electrotecnia II

Ano: 6<sup>to</sup> Div: 3<sup>era</sup>

Horario Viernes 7:30 a 9:30

Profesor: Grisancich, Pablo

Clase nro :3

Contenido:

- Respuesta del Inductor excitado con distintas fuentes de corriente.
- Respuesta del inductor excitado con distintas fuentes de tensión.
- Asociacion de inductores en serie y en paralelo..
- Divisores de tensión ideales, Resistivos, Inductivos y Capacitivos.
- Divisores de corriente ideales, Resistivos, Inductivos y Capacitivos.
- Divisores de tensión práctico compensado.

Ya hemos visto la respuesta del capacitor en forma individual a distintos tipos de excitaciones ( para excitación con señales senoidales utilizaremos otro método que será tema de estudio más adelante). Por ahora, para nosotros lo más importante es entender que toda señal eléctrica puede ser representada con funciones matemáticas, algunas de ellas, especialmente pensadas para el estudio tecnológico. Luego debemos tener muy presente, que la tensión entre las placas del capacitor dependerá del tipo de excitación y la forma de encontrar esta tensión es:

$$V_c(t) = \frac{1}{C} \int I_c(t) dt$$

y si queremos obtener la corriente que circula por el capacitor despejando de la anterior ecuación será entonces:

$$I_c(t) = \frac{C \partial V_c(t)}{\partial t}$$

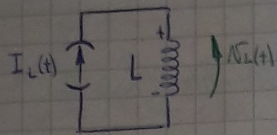
Haremos el mismo estudio ahora para el inductor terminando así nuestro estudio para los componentes en forma individual.

Para cerrar el tema se mostrarán unos circuitos muy conocidos por nosotros que son los divisores de tensión y corriente pero, esta vez realizados con capacitores e inductores. Para cerrar el tema, analizaremos el caso de un divisor de tensión práctico, donde se compensan los efectos parásitos.



## INDUCTOR

Inductor excitado por un generador de Corriente

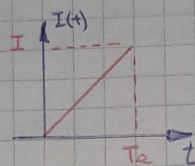


Recordemos que para un inductor la tensión entre sus bornes está dada por la expresión.

$$V_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} \quad (1)$$

### Generador de Corriente Tipo Rampa

En este caso nuestro generador entregará una señal de corriente del tipo.



$$i(t) = \frac{I}{T_a} t u(t) \quad (2)$$

Reemplazando (2) en (1) será:

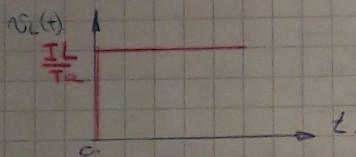
$$V_L(t) = L \frac{d}{dt} \left( \frac{I}{T_a} t u(t) \right)$$

pero.  $t u(t) = p(t)$  y  $\frac{I}{T_a} = \text{cte.}$

$$V_L(t) = \frac{L I}{T_a} \frac{dp(t)}{dt}$$

, recordando que la derivada de  $p(t) = u(t)$

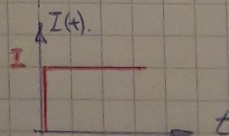
$$V_L(t) = \frac{L I}{T_a} u(t)$$



Ejemplo: Para una fuente de Corriente de Tipo Rampa que al cabo de 3 mseg entrega una corriente de 3A. Para un inductor de 3 mH Hallar la tensión sobre él. Graficar.

### Generador de Corriente Tipo Escalón

En este caso el generador entregará una señal del tipo:



$$i(t) = I u(t) \quad (2)$$

Reemplazando (2) en (1) será:  $V_L(t) = L \frac{dI u(t)}{dt} \Rightarrow V_L(t) = I L \frac{du(t)}{dt}$

recordando que  $\frac{du(t)}{dt} = \delta(t)$  será:  $V_L(t) = I L \delta(t)$



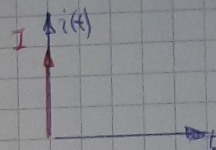
Ejemplo para un generador de I en escalón de 3A y la bobina anterior, calcular  $V_L(t)$ .



13

### Impulso de Corriente

En este caso el generador entrega una señal del tipo.

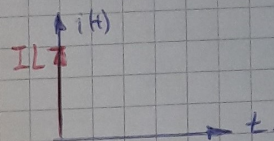


$$i(t) = I \delta(t) \quad (2)$$

reemplazando (2) en (1) serí:  $v_L(t) = L \frac{d I \delta(t)}{dt} \Rightarrow v_L(t) = L \cdot I \frac{d \delta(t)}{dt}$

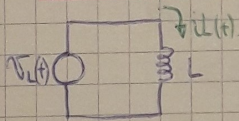
recordando que  $\frac{d \delta(t)}{dt} = \delta(t)$  serí:

$$v_L(t) = I L \delta(t)$$



Ejemplo: Paso un generador de corriente de Tipo Impulso que entrega 3 A. a través de la tensión en una bobina de 3 mH, 60 Hz.

### Inductor Excitado por Fuente de Tensión



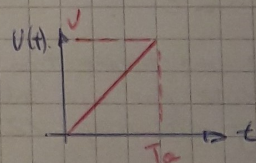
Recordemos que para un inductor la corriente que circula por él está dada por la expresión:

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_0^t v_L(t) dt + i_L(0) \quad (1)$$

$i_L(0)$  representa la corriente previa en el inductor. Este puede ser 0 si en el inductor no había variación previa del flujo magnético.

### Generador de Tensión Tipo Rampe

En este caso la tensión aplicada tiene la forma:

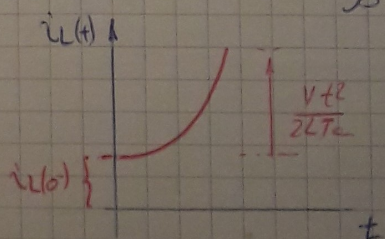


$$V(t) = \frac{V}{T_a} t \cdot u(t) \quad (2)$$

reemplazando (2) en (1) serí:  $i_L(t) = \frac{1}{L} \int_0^t \frac{V}{T_a} t u(t) dt + i_L(0) \Rightarrow$

$i_L(t) = \frac{V}{L T_a} \int_0^t t u(t) dt + i_L(0)$  recordando que  $\int_0^t t u(t) dt = \frac{t^2}{2} u(t)$  serí:

$$i_L(t) = \frac{V t^2}{2 L T_a} + i_L(0)$$



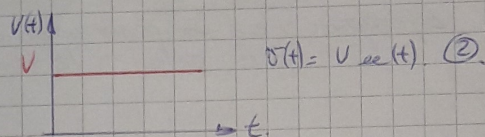


Ejemplo: para una fuente de tensión tipo rampa que al cabo de 3 mseg. entregue una tensión de 5V. Calcular la corriente que circule por una bobina de 3 mH al cabo de 1 mseg, 2 mseg, 3 mseg, 5 mseg y 10 mseg. Graficar la bobina se encuentra descargada.

14

### Generador de Tensión Tipo Escalon.

El generador entrega una tensión del tipo



reemplazando (2) en (1) será:  $I_L(t) = \frac{1}{L} \int_0^t V u(t) dt + I_L(0)$

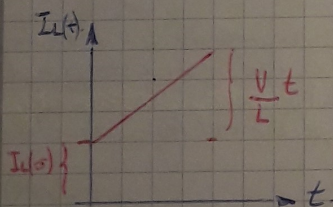
$I_L(t) = \frac{V}{L} \int_0^t u(t) dt + I_L(0)$  recordando que  $\int_0^t u(t) dt = p(t)$  será:

$$I_L(t) = \frac{V}{L} p(t) + I_L(0)$$

recordemos que  $p(t) = t \cdot u(t)$

si  $t \geq 0$ ,  $u(t) = 1$ ,  $\therefore$  para  $t \geq 0$ .

de lo mismo escribir  $p(t) = t \cdot u(t) = t$ .



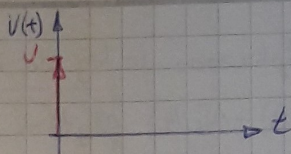
Ejemplo: para una fuente tipo escalón de 5V. Calcular la corriente que circule por una bobina de 3 mH al cabo de 1 mseg, 2 mseg, 3 mseg, 5 mseg, 10 mseg, 12 mseg. La bobina está descargada. Graficar.



15

### Impulso de Tensión.

El generador entrega una tensión del tipo.



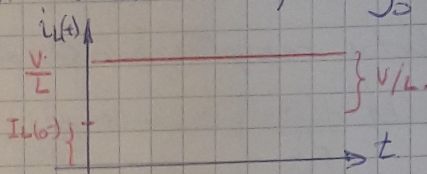
$$V(t) = V \delta(t) \quad (2).$$

Recordando que para un inductor  $i_L(t) = \frac{1}{L} \int_0^t V(t) dt + i_L(0^-)$  (1).

Reemplazando (2) en (1) se da:  $i_L(t) = \frac{1}{L} \int_0^t V \delta(t) dt + i_L(0^-)$ .

$i_L(t) = \frac{V}{L} \int_0^t \delta(t) dt + i_L(0^-)$  recordando que  $\int_0^t \delta(t) dt = u(t)$  se da:

$$i_L(t) = \frac{V}{L} u(t) + i_L(0^-)$$



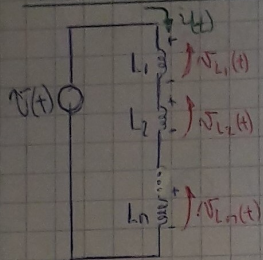
Ejemplo: Para un impulso de tensión de 5V, calcular la corriente que circula por una bobina de 3mH y al cabo de 1ms, 2ms, 3ms, 6ms y 12ms. La bobina está descargada. Graficar.



## Asociación de Inductores

16

### Asociación Serie



Aplicando la ley de Kirchhoff de las tensiones será:

$$V(t) - V_{L_1}(t) - V_{L_2}(t) - \dots - V_{L_n}(t) = 0 \Rightarrow$$

$$V(t) = V_{L_1}(t) + V_{L_2}(t) + \dots + V_{L_n}(t) \quad (1)$$

Recordemos que la tensión en el inductor está dada por la expresión

$$V_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad (2)$$

Para cada inductor reemplazando (2) en (1) será:

$$V(t) = L_1 \frac{di(t)}{dt} + L_2 \frac{di(t)}{dt} + \dots + L_n \frac{di(t)}{dt} \quad \text{podemos sacar la derivada como factor común}$$

$$V(t) = \frac{di(t)}{dt} [L_1 + L_2 + \dots + L_n] \quad (3)$$

LLamaremos a esto Inductancia Equivalente Serie.  $L_{T_{\text{total}}}$

$$L_T = L_1 + L_2 + \dots + L_n \Rightarrow L_T = \sum_{x=1}^n L_x \quad (4)$$

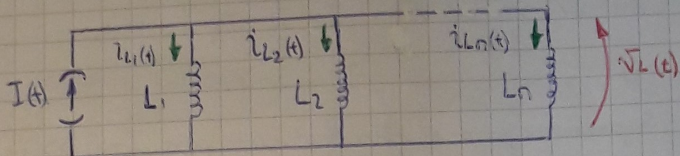
Reemplazando (4) en (3) será:

$$V(t) = L_T \frac{di(t)}{dt}$$



(17)

Asociación en paralelo.



Aplicando ley de Kirchhoff para las corrientes será:

$$I(t) - i_{L1}(t) - i_{L2}(t) - \dots - i_{Ln}(t) = 0 \Rightarrow I(t) = i_{L1}(t) + i_{L2}(t) + \dots + i_{Ln}(t) \quad (1)$$

Recordando que para el inductor la corriente eléctrica que circula a través de él está dada por la expresión:

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_0^t v_L(t) dt + i_L(0^-). \quad (2)$$

reemplazando (2) en (1) cada inductor será:

$$I(t) = \frac{1}{L_1} \int_0^t v_L(t) dt + i_{L1}(0^-) + \frac{1}{L_2} \int_0^t v_L(t) dt + i_{L2}(0^-) + \dots + \frac{1}{L_n} \int_0^t v_L(t) dt + i_{Ln}(0^-)$$

podemos sacar factor común  $\int_0^t v_L(t) dt$ 

$$I(t) = \int_0^t v_L(t) dt \cdot \left[ \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots + \frac{1}{L_n} \right] + \underbrace{i_{L1}(0^-) + i_{L2}(0^-) + \dots + i_{Ln}(0^-)}_{\text{Llamaremos a ésta Corriente total Inicial } I_T(0^-)} \quad (3)$$

$$\frac{1}{L_T} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots + \frac{1}{L_n} \Rightarrow \frac{1}{L_T} = \sum_{x=1}^n \frac{1}{L_x} \quad (4) = \frac{1}{\text{Inductancia Total del paralelo}}$$

$$I_T(0^-) = i_{L1}(0^-) + i_{L2}(0^-) + \dots + i_{Ln}(0^-) \Rightarrow I_T(0^-) = \sum_{x=1}^n i_{Lx}(0^-) \quad (5)$$

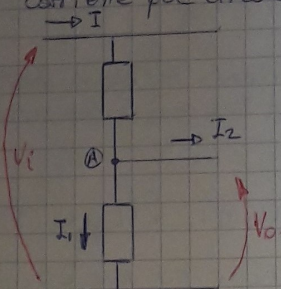
(5) Es la corriente total inicial debido al flujo magnético inicial. Esta puede ser igual a cero si en el momento inicial no había flujo almacenado en los bobinas.

$$\text{Por último reemplazando (4) y (5) en (3) será: } I(t) = \frac{1}{L_T} \int_0^t v_L(t) dt + I_T(0^-)$$



## Divisores de Tensión Ideales: Resistivos, Capacitivos e Inductivos.

Para los tres casos en estudio se supone que el consumo de corriente eléctrica en el circuito de aplicación será prácticamente nulo o mucho menor que la corriente que circula por el circuito divisor.



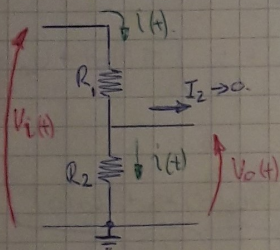
En el nodo (A)  $I - I_1 - I_2 = 0 \Rightarrow$

$$I_2 = I - I_1$$

Suponemos para nuestro estudio que  $I - I_1 \gg I_2$ .

Si  $I_2 \rightarrow 0$  entonces  $I_1 \approx I$ .

### Divisor Resistivo.

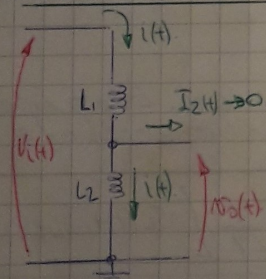


del cto tenemos 
$$\begin{cases} V_1(t) = i(t)(R_1 + R_2) \\ V_0(t) = i(t) \cdot R_2 \end{cases}$$

Si hacemos la transferencia de salida será:

$$\frac{V_0(t)}{V_1(t)} = \frac{i(t) R_2}{i(t)(R_1 + R_2)} \Rightarrow V_0(t) = V_1(t) \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

### Divisor Inductivo.



del cto tenemos 
$$\begin{cases} V_i(t) = V_{L1}(t) + V_{L2}(t) \Rightarrow V_i(t) = L_1 \frac{di(t)}{dt} + L_2 \frac{di(t)}{dt} \\ V_i(t) = (L_1 + L_2) \frac{di(t)}{dt} \\ V_0(t) = L_2 \frac{di(t)}{dt} \end{cases}$$

Si hacemos la transferencia de salida, será:

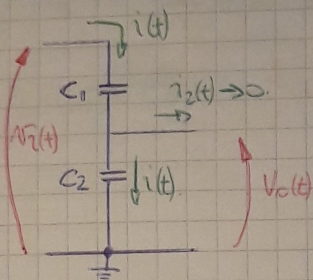
$$\frac{V_0(t)}{V_i(t)} = \frac{L_2 \frac{di(t)}{dt}}{(L_1 + L_2) \frac{di(t)}{dt}} \Rightarrow \frac{V_0(t)}{V_i(t)} = \frac{L_2}{L_1 + L_2} \Rightarrow V_0(t) = V_i(t) \frac{L_2}{L_1 + L_2}$$

Nota: Los divisores inductivos son utilizados solo en ocasiones especiales ya que son voluminosos y antieconómicos.



19

### Divisor Capacitivo.



Supongamos los capacitores inicialmente descargados.

$$\begin{aligned} V_i(t) &= V_{C1}(t) + V_{C2}(t) \Rightarrow V_i(t) = \frac{1}{C_1} \int i(t) dt + \frac{1}{C_2} \int i(t) dt \\ V_i(t) &= \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) \int i(t) dt \\ V_0(t) &= V_{C2}(t) = \frac{1}{C_2} \int i(t) dt \end{aligned}$$

Si hacemos la transferencia de salida tendremos:

$$\frac{V_0(t)}{V_i(t)} = \frac{\frac{1}{C_2} \int i(t) dt}{\left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) \int i(t) dt} \Rightarrow \frac{V_0(t)}{V_i(t)} = \frac{\frac{1}{C_2}}{\left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)} \Rightarrow V_0(t) = V_i(t) \cdot \frac{1}{\left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)}$$

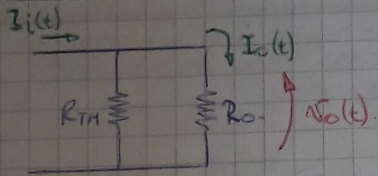
$$V_0(t) = \frac{V_i(t) \cdot \frac{1}{C_2}}{\frac{1}{C_2} \left( \frac{C_2}{C_1} + 1 \right)} \Rightarrow V_0(t) = \frac{V_i(t)}{\frac{C_2 + C_1}{C_1}} \Rightarrow \boxed{V_0(t) = V_i(t) \cdot \frac{C_1}{C_1 + C_2}}$$

Observar que por todos los casos (Resistivo Inductivo y Capacitivo). La tensión de salida es igual a la tensión de entrada por unacte menor que la unidad. este constante. no deforma la señal de entrada y solo le atenúa en amplitud. es por eso que estos circuitos son conocidos como atenuadores.



## Divisores de Corriente Ideales, Resistivos, Inductivos y Capacitivos

### Divisor Resistivo



del cto  
tenemos

$$i_o(t) = v_o(t) \frac{1}{R_o} \quad (A)$$

$$i_i(t) = v_o(t) \left( \frac{1}{R_o} + \frac{1}{R_{TH}} \right) \quad (B)$$

despejando en (B) tendremos:

$$(A) \quad i_o(t) R_o = v_o(t) \quad (1)$$

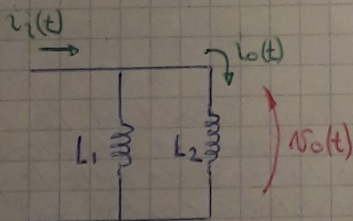
$$(B) \quad \frac{i_i(t)}{\frac{1}{R_o} + \frac{1}{R_{TH}}} = v_o(t) \Rightarrow \frac{i_i(t)}{\frac{R_o + R_{TH}}{R_o \cdot R_{TH}}} = v_o(t) \Rightarrow i_i(t) \frac{R_o \cdot R_{TH}}{R_o + R_{TH}} = v_o(t) \quad (2)$$

igualando (1) con (2) será:

$$i_o(t) R_o = v_o(t) = i_i(t) \cdot \frac{R_o \cdot R_{TH}}{R_o + R_{TH}} \Rightarrow i_o(t) = i_i(t) \frac{1}{R_o} \cdot \frac{R_o \cdot R_{TH}}{R_o + R_{TH}}$$

$$i_o(t) = i_i(t) \cdot \frac{R_{TH}}{R_o + R_{TH}}$$

### Divisor Inductivo



Suponemos todos los inductores  
sin campo magnético inicial.

del cto  
tenemos

$$v_o(t) = \frac{1}{L_2} \int v_o(t) dt \quad (A)$$

$$i_i(t) = \frac{1}{L_1} \int v_o(t) dt + \frac{1}{L_2} \int v_o(t) dt \quad (B)$$

$$\underbrace{\quad}_{i_1(t)} \quad \underbrace{\quad}_{i_2(t)}$$

$$i_o(t) = \frac{1}{L_2} \int v_o(t) dt$$

$$i_i(t) = \frac{1}{L_1} \int v_o(t) dt + \frac{1}{L_2} \int v_o(t) dt$$

=>

$$i_o(t) L_2 = \int v_o(t) dt$$

$$i_i(t) = \frac{L_1 + L_2}{L_1 \cdot L_2} \int v_o(t) dt \Rightarrow$$

$$\begin{cases} i_o(t) L_2 = \int v_o(t) dt & (1) \\ i_i(t) \frac{L_1 \cdot L_2}{L_1 + L_2} = \int v_o(t) dt & (2) \end{cases}$$

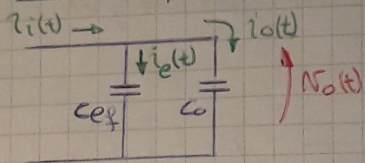
igualando (1) y (2) será:

$$i_o(t) L_2 = \int v_o(t) dt = i_i(t) \frac{L_1 \cdot L_2}{L_1 + L_2} \Rightarrow i_o(t) = i_i(t) \cdot \frac{1}{L_2} \cdot \frac{L_1 \cdot L_2}{L_1 + L_2}$$

$$i_o(t) = i_i(t) \cdot \frac{L_1}{L_1 + L_2}$$



### Divisor Capacitivo



$$\left\{ \begin{array}{l} i_o(t) = C_o \frac{dV_o(t)}{dt} \\ i_i(t) = \underbrace{C_{ef} \frac{dV_o(t)}{dt}}_{i_e(t)} + \underbrace{C_o \frac{dV_o(t)}{dt}}_{i_o(t)} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} i_o(t) = C_o \frac{dV_o(t)}{dt} \\ i_i(t) = (C_{ef} + C_o) \cdot \frac{dV_o(t)}{dt} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{i_o(t)}{C_o} = \frac{dV_o(t)}{dt} \quad (1) \\ \frac{i_i(t)}{(C_{ef} + C_o)} = \frac{dV_o(t)}{dt} \quad (2) \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{igualando} \\ (1) \text{ y } (2) \end{array}$$

$$\frac{i_o(t)}{C_o} = \frac{dV_o(t)}{dt} = \frac{i_i(t)}{(C_{ef} + C_o)} \Rightarrow i_o(t) = i_i(t) \cdot \frac{C_o}{(C_{ef} + C_o)}$$



## Divisor de Tensión Práctico Compensado

(22)

Analizaremos ahora cualitativamente al atenuador compensado. Nos acercaremos un poco más a la situación de trabajo real donde tendremos en cuenta el efecto capacitivo parásito en los resistores y el efecto resistivo parásito en los condensadores.

Para un divisor resistivo teniendo en cuenta su capacitancia parásita

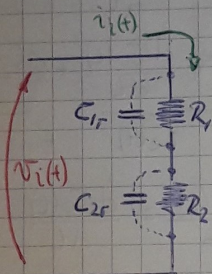


Figura I

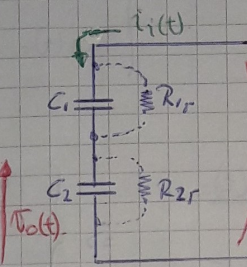


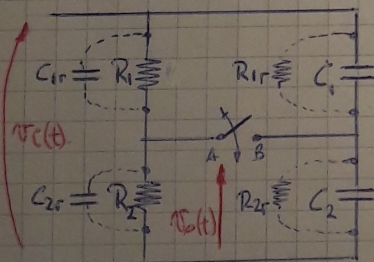
Figura II

Para un divisor capacitivo teniendo en cuenta su resistencia parásita

Es claro que al aparecer estos parámetros residuales se perderá la propiedad que el atenuador sea solo una constante numérica alterando de esta manera también la forma de la señal de salida y en consecuencia, la tensión de salida del divisor real estará ligada a la excitación por un operador matemático que no será una constante, es decir:

$$V_o(t) = \text{operador matemático } V_i(t).$$

Como es lógico, el divisor a implementar deberá cumplir con las dos condiciones: No modificar la forma de la señal de salida y solo atenuarla. Dado que los divisores mostrados en la figura I y II no logran en forma individual satisfacer las condiciones mencionadas, serán superpuestas, tal como se ilustra en la siguiente figura, observándose lo siguiente:



Es totalmente posible y habitual que se cumpla

$$C_1 \gg C_{1r}$$

$$R_1 \ll R_{1r}$$

$$C_2 \gg C_{2r}$$

$$R_2 \ll R_{2r}$$

Para poder unir el cto entre A y B y no afectar las caídas de tensión debe darse que  $V_A(t) = V_B(t)$ . de esta forma  $V_{AB}(t) = 0V$ , además con esta condición se cancelan los parámetros residuales.

del divisor resistivo ideal se tiene  $V_{or}(t) = V_i(t) \frac{R_2}{R_1 + R_2}$  ①

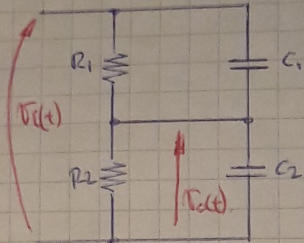
del divisor capacitivo ideal se tiene  $V_{oc}(t) = V_i(t) \frac{C_1}{C_1 + C_2}$  ②

Si la tensión  $V_A(t)$  en el divisor resistivo es igual a la tensión  $V_B(t)$  en el divisor capacitivo, entonces no circulará corriente entre los puntos A y B ya que los dos están al mismo potencial.



23

Con  $V_A = V_B$  y los parámetros residuales cancelados, uniendo los puntos A y B se llega al siguiente cto práctico.



$$V_A(t) = V_{oR}(t) \quad (3)$$

$$V_B(t) = V_{oC}(t) \quad (4)$$

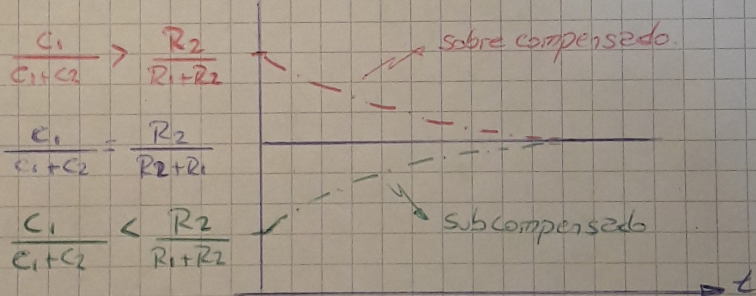
•  $V_A(t) = V_B(t)$  reemplazando por (3) y (4) será:  $V_{oR}(t) = V_{oC}(t)$  (5)  
reemplazando (1) y (2) en (5) será:

$$\cancel{V_i(t)} \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \cancel{V_i(t)} \cdot \frac{C_1}{C_1 + C_2} \Rightarrow \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{C_1}{C_1 + C_2}$$

condición de compensación.

La condición de compensación es una constante de atenuación que en la práctica cumple con la condición de no alterar la forma de la señal de salida.

Una manera práctica de verificar lo anterior es armar el cto con capacitores y resistores variables y aplicar a la entrada una señal del tipo escalón (o eventualmente cuadrada). La salida puede visualizarse conectando un osciloscopio y se podrá observar en la pantalla las formas indicadas, dependiendo de los valores de  $R$  y  $C$  podrá ser:



Como resumen, debemos tener muy presentes que la tensión entre los extremos del inductor dependerá del tipo de excitación y la forma de encontrar esta tensión es:

$$V_l(t) = \frac{L \partial i_l(t)}{\partial t}$$

y si queremos obtener la corriente que circula por el inductor despejando de la anterior ecuación será entonces:

$$i_l(t) = \frac{1}{L} \int V_l(t) dt$$

Reemplazando la excitación en estas ecuaciones y operando (derivando o integrando según corresponda) obtendremos la respuesta del componente.

Hemos terminado aquí, nuestro estudio para los componentes C y L en forma individual; comenzaremos ahora a interconectar estos componentes de forma de obtener circuitos RC, RL, LC y RLC siendo estos circuitos típicos y, nos dedicaremos a estudiar su comportamiento, obteniendo las ecuaciones características de estos circuitos.